A Feynman-előadások fizikából

A Feynman-előadások fizikából

Richard P. Feynman
Robert B. Leighton
Matthew Sands

IV. kötet

TYPOTEX

A könyv megjelenését támogatta:
a Magyar Tudományos Akadémia és
a Nemzeti Kulturális Alap a kiadói program keretében.

Szakmailag lektorálta: Patkós András

ISBN 978 963 493 124 9

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról
a *www.typotex.hu* és a *facebook.com/typotexkiado*
oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Gerner József
Borítóterv: Somogyi Péter
Készült a Séd Kft.-ben, Szekszárdon
Felelős vezető: Dránovits Anna

Tartalom

77. fejezet

Elektrodinamika relativisztikus jelölésmódban (Ebben a fejezetben: $c = 1$)

Ismétlés: 15. fejezet: Speciális relativitáselmélet; 16. fejezet: Relativisztikus energia és impulzus; 17. fejezet: Téridő; 65. fejezet: Magnetosztatika.

77.1. Négyesvektorok

Ebben a fejezetben a speciális relativitáselméletet alkalmazzuk az elektrodinamikára. Mivel a speciális relativitáselméletet a 15–17. fejezetekben már tanulmányoztuk, most csak a főbb gondolatokon szaladunk át.

Kísérletekkel igazolt megállapítás, hogy a fizika törvényei változatlanok maradnak, amennyiben állandó sebességgel mozgunk. Nem tudjuk például megmondani, vajon egy űrhajó belsejében ülünk-e, ha az egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, hacsak ki nem tekintünk belőle, vagy valamilyen, a külvilággal kapcsolatos megfigyelést nem végzünk. Bármely fizikailag helyes törvényt valahogy úgy kell megfogalmaznunk, hogy a természet e tulajdonságát tartalmazza.

Ha S' rendszer S-hez képest v egyenletes sebességgel halad az x irányban, akkor a két különböző S és S' koordináta-rendszerben mért idő- és helykoordináták közötti összefüggést a Lorentz-transzformáció adja:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = y, \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad z' = z. \end{aligned} \tag{77.1}$$

A fizika törvényeinek olyanoknak kell lenniük, hogy a Lorentz-transzformáció elvégzése után alakjuk ne változzon. Ez ugyanolyan elv, mint az, hogy a fizika törvényei koordináta-rendszerünk *irányításától* függetlenek. A 11. fejezetben láttuk, hogy a fizika törvényeinek a forgatásokkal szembeni invarianciája matematikailag *vektoregyenletekkel* fejezhető ki.

Ha például van két vektorunk

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z),$$

azt találjuk, hogy az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

kombináció nem változik meg, ha valamely elforgatott új koordináta-rendszerre térünk át. Más szóval, tudjuk, hogy ha az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$-hez hasonló skalárszorzat alkotja az egyenlet két oldalát, az egyenletnek pontosan ugyanaz marad az alakja minden más elforgatott koordináta-rendszerben. Tanulmányaink során megismertünk egy operátort (lásd 54. fejezet)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

amelyet, ha valamely skalárfüggvényre alkalmazzuk, három vektorként transzformálódó mennyiséget kapunk. Ezzel az operátorral definiáltuk a gradienst, majd további vektorok kombinációjából a divergenciát és a Laplace-operátort. Végül rájöttünk, hogy ha két vektor komponensei közül bizonyosakat páronként összeszorzunk, ezek összegéből három olyan új mennyiség adódik, amelyek vektorszerűen viselkednek. A kapott mennyiséget két vektor *vektorszorzatának* neveztük. A ∇ operátorral képezett vektorszorzatot valamely vektor rotációjaként definiáltuk.

Vektor definíciója	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
Skalárszorzat	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
A derivált vektoroperátor	∇
Gradiens	$\nabla\varphi$
Divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{A}$
Laplace-operátor	$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$
Vektorszorzat	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
Rotáció	$\nabla \times \mathbf{A}$

77.1. táblázat. A háromdimenziós vektoranalízis fontosabb kifejezéseinek és operátorainak jegyzéke

Mivel a továbbiakban szükségünk lesz a vektoranalízis során tanultakra, a 77.1. táblázatban összesítve adtuk meg az eddigiekben alkalmazott háromdimenziós mennyiségekkel kapcsolatos legfontosabb műveleteteket. Fontos, hogy a fizika törvényeit fel tudjuk úgy írni, hogy a forgatás során mindkét oldal egyformán transzformálódjon. (Ha például az egyik oldalon vektor áll, a másik oldalon ugyanúgy vektornak kell állnia, így a koordináta-rendszer forgatásával mindkét oldal egyforma módon változik meg. Hasonlóan, ha egyik oldal skalár, a másik oldalnak is skalárnak kell lennie, stb.)

A speciális relativitáselméletben az idő és a tér fogalma elválaszthatatlanul összefonódik, ezért a most említett eljárást négy dimenzióban kell végrehajtanunk. Azt akarjuk, hogy egyenleteink *bármilyen* tehetetlenségi rendszerben változatlanok maradjanak. Ez azt jelenti, hogy egyenleteinknek invariánsaknak kell lenniük a (77.1) alatt megadott Lorentz-transzformációval szemben. E fejezetben azt akarjuk megmutatni, hogyan érhető ez el. Mielőtt azonban bármibe is belekezdenénk, még tennünk kell valamit, ami munkánkat majd lényegesen megkönnyíti (és egyúttal megóv néhány félreértéstől). A hosszúság- és az időegységet úgy választjuk meg, hogy a fény sebessége, c, 1-gyel legyen egyenlő. Felfoghatjuk ezt úgy is, hogy azt az *időtartamot választjuk* egységnek, *amely alatt a fény egy méter utat tesz meg* (ez körülbelül $3 \cdot 10^{-9}$ s). Az időegységet „egy méternek” is nevezhetnénk. Ezzel az egységgel számolva, egyenleteink világosabban tükrözik a téridő-szimmetriát, s egyúttal minden c eltűnik a relativisztikus egyenleteinkből. (Ha ez bárkit is aggasztana, a c bármikor visszahelyettesíthető akármelyik egyenletbe, t helyett ct-t írva, vagy általánosabban mindenhová c-t írva be, ahol az egyenlet dimenzióhelyessége megkívánja.) Az előkészületek után most mindazt, amit a három dimenzióban a vektorokkal tettünk, megismételjük a négydimenziós téridőben. A feladat tulajdonképpen elég egyszerű: csak az analógia alapján kell dolgoznunk. Egyedüli nehézséget a jelölések kiválasztása jelenti (háromdimenziós módszer során ugyanis már kimerítettük a vektorok jelölési lehetőségét) és az, hogy az előjelek időnként a szokásoshoz képest ellenkezőek lesznek.

Először is, a háromdimenziós vektorok mintájára definiáljuk a *négyesvektort*, mint négy elemből, a_t, a_x, a_y és a_z-ből álló mennyiséget, amely a mozgó koordináta-rendszerre való áttéréskor t, x, y és z-hez hasonló módon transzformálódik. A négyesvektorokra egész sereg jelölés lehetséges, mi a_μ-t használjuk erre a célra, ezen négy számot értünk mindig: a_t, a_x, a_y, a_z – más szavakkal, a μ index a t, x, y és z négy értékét veheti fel. Néhányszor hasznos lesz, ha a három térkomponenst egy hármasvektorral jelöljük, ilyenformán: $a_\mu = (a_t, \mathbf{a})$.

Egy négyesvektort már megismertünk az előzőek során, ezt egy részecske energiája és impulzusa alkotja (lásd 17. fejezet). Új jelölésmódunk szerint ezt így írhatjuk:

$$p_\mu = (W, \mathbf{p}), \tag{77.2}$$

ami azt jelenti, hogy a p_μ négyesvektor egy részecske W energiájából és a $\mathbf{p}$ hármasvektor három komponenséből épül fel.

Úgy tűnik, mintha igen egyszerű dolgunk lenne: minden hármasvektorhoz megkeressük a hiányzó negyedik komponenst, és kész a négyesvektor. Ez azonban nem így van! Ennek illusztrálására vegyük szemügyre a sebességvektort három komponensével:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Mi lesz vajon az időkomponens? Ösztönösen azt gondolnánk, hogy a négyesvektorok olyanok, mint t, x, y és z, és azt hihetnénk, hogy az időkomponens

$$v_t = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = 1.$$

Csakhogy ez nem igaz, mert a nevezőkben levő t a Lorentz-transzformációval megváltozik. A számláló ugyan a négyesvektoroknak megfelelően viselkedik, a nevezőben szereplő dt azonban aszimmetriát okoz, és így a komponensek két különböző rendszerben más és más formát öltenek.

Az előbb felírt négy „sebességkomponens" egy négyesvektor komponenseit alkotja, csak el kell őket osztani $\sqrt{1-v^2}$-tel. Ez belátható, hogy ha először a

$$p_\mu = (W, \mathbf{p}) = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) \tag{77.3}$$

impulzus-négyesvektort tekintjük, majd elosztjuk az m_0 nyugalmi tömeggel, ezzel a *négy dimenzióban* invariáns skalármennyiséggel, amikor is a

$$\frac{p_\mu}{m_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) \tag{77.4}$$

számnégyeshez jutunk, amelynek még mindig négyesvektornak kell lennie. (*Invariáns skalárral* való osztás a transzformációs tulajdonságokat nem változtatja meg.) *Definiálhatunk* tehát egy u_μ „*sebességvektort*" az alábbi egyenletek szerint:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad & u_y &= \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \\ u_x &= \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad & u_z &= \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \tag{77.5}$$

A négyessebesség hasznos mennyiség, felírható például vele a következő összefüggés:

$$p_\mu = m_0 u_\mu. \tag{77.6}$$

Az egyenlet tipikusan olyan alakú, mint amilyennek a relativisztikusan helyesen felírt egyenletnek lennie kell: mindkét oldalon egy négyesvektor áll. (A jobb oldal egy invariáns skalár szorozva egy négyesvektorral, ami továbbra is négyesvektor.)

77.2. A skalárszorzat

Puszta véletlennek is felfoghatjuk, hogy a koordináta-rendszert elforgatva, valamely pontnak a kezdőponttól mért távolsága változatlan marad. Matematikailag ez azt jelenti, hogy $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ invariáns. Más szavakkal: forgatás után $r'^2 = r^2$, vagy

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Vajon van-e olyan mennyiség, amely a Lorentz-transzformációval szemben marad invariáns? Van. A (77.1) alapján látható, hogy

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2.$$

No, ez rendben is lenne, eltekintve attól a szépséghibától, hogy eljárásunk függ az x-tengely megválasztásától. Ezt azonban kiküszöböljük, ha a most felírt egyenletből még y^2-et és z^2-et is levonjuk. Az így kapott mennyiség változatlan marad tetszőleges Lorentz-transzformáció és elforgatás esetén. A háromdimenzióban felírt r^2-hez hasonló mennyiség négy dimenzióban tehát:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Ez invariáns az úgynevezett „teljes Lorentz-csoporttal" szemben – vagyis invariáns állandó sebességű eltolással és elforgatással szemben.

Mivel a szóban forgó invariancia algebrai jellegű tulajdonság – kizárólag a (77.1)-gyel megadott transzformációs szabályoktól, valamint az elforgatástól függ –, minden négyesvektorra igaz (definíció szerint a négyesvektorok egyforma módon transzformálódnak). Tetszőleges négyesvektorra felírható tehát:

$$a_t'^2 - a_x'^2 - a_y'^2 - a_z'^2 = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2.$$

Ezt a mennyiséget a négyesvektor „hossza" négyzetének nevezzük. (Előfordul néha, hogy a tagok előjeleit megcserélik, és az $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2$ kifejezést nevezik hosszúságnak; erre jó mindig ügyelnünk.)

Ha az a_μ és b_μ két négyesvektor megfelelő komponensei egyformán transzformálódnak, akkor

$$a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

kombináció invariáns (skalár) mennyiség. (Ezt egyébként a 17. fejezetben már bebizonyítottuk.) A kifejezés igencsak hasonlít a vektorok skalárszorzatára, a továbbiakban két *négyesvektor skalárszorzatának* is nevezhetjük és a szokásos módon egyszerűen $a_\mu b_\mu$-vel jelöljük. *Definíció szerint* tehát:

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \tag{77.7}$$

Amikor két azonos indexet látunk (μ helyett v-t vagy egyéb betűt is használhatunk), ez azt jelenti, hogy képeznünk kell a négy szorzatot, össze kell adnunk őket, *emlékezetben tartva*, hogy a térbeli komponensek *negatív előjelet* kapnak. Ezzel a jelölésmóddal a skalárszorzat Lorentz-transzformációval szemben mutatott invarianciája így írható fel:

$$a'_\mu b'_\mu = a_\mu b_\mu.$$

Mivel a (77.7) utolsó három tagja éppen a háromdimenzióra vonatkozó skalárszorzat, gyakran kényelmesebb ez a forma:

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Az is látnivaló, hogy a négydimenziós hosszúságot az $a_\mu a_\mu$ alakban is felírhatjuk:

$$a_\mu a_\mu = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = a_t^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \qquad (77.8)$$

Néha egyszerűbb ugyanezt a mennyiséget a_μ^2-tel jelölni:

$$a_\mu^2 \equiv a_\mu a_\mu.$$

Most pedig példán mutatjuk be a négyesvektorok skalárszorzatának hasznosságát. Antiprotonokat ($\overline{\mathrm{p}}$) részecskegyorsítókban a

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \overline{\mathrm{p}}$$

reakcióval állítanak elő. A reakció során egy nagy energiájú proton nekiütközik egy nyugalomban levő protonnak (ez utóbbi például egy, a nyaláb útjába helyezett hidrogén céltárgyban foglal helyet), s ha a bejövő protonnak elég nagy az energiája, akkor az eredeti két protonon kívül proton–antiproton pár is keletkezik.[1] Kérdés, mekkora energiájának kell lennie a berepülő protonnak, hogy a reakció energetikai szempontból lehetséges legyen.

A válaszhoz legkönnyebben úgy juthatunk el, ha megvizsgáljuk, hogyan megy végbe a reakció a tömegközépponti (TKP) rendszerben (77.1. ábra). Jelöljük a-val a berepülő protont, p_μ^a-val pedig négyesimpulzusát. Hasonlóképpen a targetprotont b-vel, négyesimpulzusát p_μ^b-vel jelöljük. Ha a bejövő protonnak *csak annyi* az energiája, hogy a reakció *éppenhogy* végbemegy, a végállapotban – azaz az ütközés utáni állapotban – egy, a TKP-ban nyugalomban levő három protont, valamint antiprotont tartalmazó részecskecsoport jelenik meg. Ha a bejövő energia egy kicsit több,

---

[1] Felvetődhet a kérdés, hogy miért nem a

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \mathrm{p}\overline{\mathrm{p}},$$

vagy még inkább a

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \overline{\mathrm{p}}$$

reakciókat vizsgáljuk, amelyek látnivalóan kevesebb energiát igényelnek. Azért, mert az úgynevezett *barionszám-megmaradás* elve kimondja, hogy a „protonok száma mínusz antiprotonok száma” nem változhat meg. Reakciónk bal oldalán a barionszám kettővel egyenlő. Ezért, ha a jobb oldalhoz egy antiprotont akarunk hozzátenni, három protonnak (vagy más barionnak) kell ugyanott szerepelnie. [A barionszám megmaradásának elvét Wigner Jenő mondta ki 1949-ben. (*A szakmai lektor kiegészítése.*)]

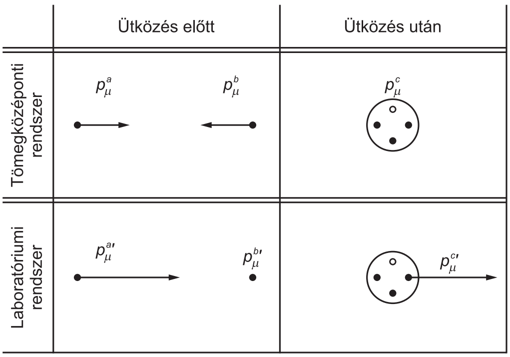
a végállapot részecskéi bizonyos kinetikus energiával rendelkeznek és eltávolodnak egymástól. Végül pedig, ha az energia egy csekéllyel is kevesebb, nincs elég energia ahhoz, hogy négy részecske keletkezzen.

Jelöljük p^c_μ-vel a részecskecsoport teljes négyesimpulzusát a végállapotban. Az energia- és impulzusmegmaradás összefüggései alapján felírhatjuk:

$$\mathbf{p}^a + \mathbf{p}^b = \mathbf{p}^c$$

és

$$W^a + W^b = W^c.$$



77.1. ábra. A $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to 3\mathrm{p} + \overline{\mathrm{p}}$ reakció laboratóriumi, illetve tömegközépponti rendszerből nézve. Feltételezzük, hogy a bejövő protonnak éppen csak annyi az energiája, amennyi a reakció végbemenéséhez szükséges. A protonokat fekete, az antiprotonokat fehér körök ábrázolják

A két egyenletet összekapcsolva:

$$p^a_\mu + p^b_\mu = p^c_\mu. \tag{77.9}$$

Az eddigiekből az a lényeges, hogy az előttünk levő egyenlet négyesvektorokra érvényes, következésképpen igaz bármely tehetetlenségi rendszerben. Ez a tény felhasználható számításaink egyszerűbbé tételére. Először is, vesszük a (77.9) egyenlet mindkét oldalának „hosszát”, ezek természetesen szintén megegyeznek:

$$(p^a_\mu + p^b_\mu)(p^a_\mu + p^b_\mu) = p^c_\mu p^c_\mu. \tag{77.10}$$

Mivel $p^c_\mu p^c_\mu$ invariáns, bármely koordináta-rendszerben kiszámíthatjuk. A TKP-rendszerben p^c_μ időkomponense a négy proton nyugalmi energiája, azaz $4M$, a térbeli rész zérus; vagyis $p^c_\mu = (4M, \mathbf{0})$. Kihasználtuk azt a tényt, hogy az antiproton nyugalmi tömege egyenlő a proton nyugalmi tömegével. A közös tömeget M-mel jelöltük.

A (77.10) egyenlet ezek szerint így alakul:

$$p^a_\mu p^a_\mu + 2p^a_\mu p^b_\mu + p^b_\mu p^b_\mu = 16M^2. \tag{77.11}$$

$p^a_\mu p^a_\mu$ és $p^b_\mu p^b_\mu$ kifejezéseket könnyű meghatározni, mivel egy részecske impulzus-négyesvektorának „hossza” a részecske nyugalmi tömegének négyzetével egyenlő:

$$p_\mu p_\mu = W^2 - \mathbf{p}^2 = M^2.$$

Ezt közvetlen számolással is bebizonyíthatjuk, de egyszerűbb a dolgunk, ha észrevesszük, hogy *nyugvó részecske* esetén $p_\mu = (M, \mathbf{0})$, ennélfogva $p_\mu p_\mu = M^2$. Miután azonban $p_\mu p_\mu$ invariáns, bármilyen más rendszerben is M^2-tel egyenlő. Ezt felhasználva a (77.11)-ben:

$$2p_\mu^a p_\mu^b = 14M^2$$

vagy

$$p_\mu^a p_\mu^b = 7M^2 \tag{77.12}$$

adódik.

Most ki kell még számítanunk $p_\mu^a p_\mu^b = p_\mu^{a\prime} p_\mu^{b\prime}$-t a laboratóriumi rendszerben. $p_\mu^{a\prime}$ négyesvektor $(W^{a\prime}, \mathbf{p}^{a\prime})$-ként írható fel, míg $p_\mu^{b\prime} = (M, \mathbf{0})$, mivel ez utóbbi nyugalomban levő protont ír le. Így $p_\mu^{a\prime} p_\mu^{b\prime}$ MW^a-val is egyenlő kell hogy legyen, s minthogy tudjuk, a skalár szorzat invariáns, egyúttal egyenlőnek kell lennie a (77.12) egyenlet által meghatározott számmal. Innen

$$W^{a\prime} = 7M,$$

s ez épp a keresett eredmény. A bejövő proton *teljes* energiájának legalább $7M$-mel (azaz körülbelül 6,6 GeV-vel, minthogy $M = 938\text{MeV}$) kell egyenlőnek lennie, ami az M nyugalmi tömeget levonva, $6M$ (körülbelül 5,6 GeV) *mozgási* energiának felel meg. A Berkeley-i gyorsító a protonokat körülbelül 6,2 GeV kinetikus energiára gyorsítja fel, s így antiprotonokat is elő tudnak vele állítani.

Minthogy a skalárszorzat invariáns, érdemes minden esetben kiszámítani. Mivel egyenlő a négyessebesség $u_\mu u_\mu$ „hosszúsága”?

$$u_\mu u_\mu = u_t^2 - \mathbf{u}^2 = \frac{1}{1-v^2} - \frac{v^2}{1-v^2} = 1.$$

Vagyis u_μ *egység-négyesvektort* alkot.

77.3. A négydimenziós gradiens

A következőkben meg kell beszélnünk, mi lesz a gradiensvektor négydimenziós megfelelője. Emlékeztetünk arra (14. fejezet), hogy a $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ és $\partial/\partial z$ három differenciáloperátort együttesen gradiensnek neveztük, amely úgy transzformálódik, mint egy hármasvektor. Léteznie kell hasonló operátornak négy dimenzióban is. Azt lehetne gondolni, hogy a négydimenziós gradiens $\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$. *Ez azonban nem igaz.*

Hogy észrevegyük a hibát, vizsgáljunk egy skalárfüggvényt, amely csak x-től és t-től függ. φ megváltozása, amikor t-ben egy kicsiny Δt változást okozunk és ezalatt x-et rögzítve tartjuk:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Delta t. \tag{77.13}$$

Másrészt a mozgó megfigyelő szerint

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\Delta x' + \frac{\partial\varphi}{\partial t'}\Delta t'.$$

A (77.1) egyenlettel $\Delta x'$ és $\Delta t'$ kifejezhető Δt-vel. Figyelembe véve, hogy x-et rögzítve tartjuk, vagyis $\Delta x = 0$, írhatjuk:

$$\Delta x' = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t; \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Ennélfogva

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t'} - v\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Az eredményt (77.13)-mal egybevetve:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t'} - v\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right). \tag{77.14}$$

Hasonló számolással

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'} - v\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\right). \tag{77.15}$$

Láthatjuk, hogy a gradiens meglehetősen furcsa „jószág”. x-et, illetve t-t x' és t' függvényében az alábbi képletek határozzák meg [a (77.1) egyenletet megoldottuk x-re és t-re]:

$$t = \frac{t' - vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Így „köteles” transzformálódni egy négyesvektor. A (77.14) és (77.15) egyenletben azonban számos előjel hibás!

A hibákat úgy küszöböljük ki, hogy a *hibás* $(\partial/\partial t, \nabla)$ helyett a ∇_μ-vel jelölt *négydimenziós gradiensoperátort* a következőképp *definiáljuk*:

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{77.16}$$

Ezzel a meghatározással máris eltűnnek az előjelproblémák, ∇_μ pedig úgy viselkedik, mint egy négyesvektor. (Ezek a negatív előjelek, ami igaz, az igaz, elég furcsák, de mit lehet tenni, a természet ilyen.) Természetesen az alatt, hogy ∇_μ „úgy viselkedik, mint egy négyesvektor” , egyszerűen azt értjük, hogy valamely skalár négyesgradiense négyesvektor. Ha φ valódi skalár- (Lorentz-invariáns) tér, akkor $\nabla_\mu\varphi$ négyesvektortér.

Idáig rendben is lennénk. Most pedig, hogy van már vektorunk, gradiensünk, skalárszorzatunk, következő lépésként keressünk egy invariánst is, amely a háromdimenziós vektoranalízis divergenciájának megfelelője. Világos, hogy az analógia nyomán $\nabla_\mu b_\mu$-t kell képeznünk, ahol b_μ valamilyen négyesvektortér, amelynek komponensei a tér és idő függvényei. Valamely $b_\mu = (b_t, \mathbf{b})$ négyesvektor *divergenciáját* ∇_μ és b_μ skalárszorzataként *definiáljuk*:

$$\nabla_\mu b_\mu = \frac{\partial}{\partial t} b_t - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) b_x - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) b_y - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) b_z = \frac{\partial}{\partial t} b_t + \nabla \cdot \mathbf{b}, \tag{77.17}$$

ahol $\nabla \cdot \mathbf{b}$ a $\mathbf{b}$ hármasvektor közönséges divergenciája. Az előjelekkel óvatosaknak kell lennünk. Néhány negatív előjel a skalárszorzat (77.7) definíciójából származik, a többi azért szükséges, mert ∇_μ térbeli komponensei $-\partial/\partial x$ stb., ahogy ezt (77.16) mutatja. A (77.17) egyenlettel definiált divergencia invariáns mennyiség, és az egymástól a Lorentz-transzformáció miatt különböző koordináta-rendszerekben ugyanazt az eredményt adja.

Vizsgáljunk most egy olyan fizikai példát, amelyben a négyesdivergencia jelenségét tanulmányozhatjuk. Ez utóbbi segítségével meg tudjuk például határozni a mozgó vezetékek körül kialakult tereket. Előzőleg már láttuk (65. fejezet 65.7. szakasz), hogy a ϱ elektromos töltés és a $\mathbf{j}$ áramsűrűség négyesvektort alkot: $j_\mu = (\varrho, \mathbf{j})$. Ha egy töltés nélküli vezetékben j_x az áramsűrűség, akkor az x-tengely mentén v sebességgel tovahaladó rendszerben, a vezetékben a következő töltés-, illetve áramsűrűséget észlelhetjük [a kifejezéseket a (77.1) Lorentz-transzformáció alkalmazásával kapjuk]:

$$\varrho' = \frac{-v j_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Ezek éppen azok a mennyiségek, amelyeket a 65. fejezetben egyszer már megkaptunk. Behelyettesítve ezeket a forrásokat a Mawxell-egyenletekbe, *mozgó rendszerekben* is meghatározhatók a térerősségek.

A töltésmegmaradás törvénye (lásd 65.2. szakasz) négyesvektor-jelöléssel szintén egyszerű alakú lesz. A j_μ négyesdivergenciája:

$$\nabla_\mu j_\mu = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}. \tag{77.18}$$

A töltésmegmaradás törvénye szerint az egységnyi térfogatra eső kiáramlásnak egyenlőnek kell lennie a töltéssűrűség időegységre eső csökkenésével. Más szavakkal

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

Ezt a (77.18) kifejezéssel összevetve, a következő egyszerű alakban írható fel a töltésmegmaradás törvénye:

$$\nabla_\mu j_\mu = 0. \tag{77.19}$$

Minthogy $\nabla_\mu j_\mu$ invariáns skalár, ha értéke zérus valamely rendszerben, zérus lesz bármely más rendszerben is. Tehát ha a töltés valamely koordinátarendszerben megmarad, akkor minden egyenletes sebességgel mozgó rendszerben is megmarad.

Utolsó példaként tekintsük a ∇_μ gradiensoperátor önmagával való skalárszorzatát. Három dimenzióban ez a művelet a Laplace-operátort adta:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Számítsuk ki, mit kapunk négy dimenzióban. Nem is nehéz. Alkalmazzuk a skalárszorzatról, valamint a gradiensről megismert szabályokat:

$$\begin{aligned} &\nabla_\mu \nabla_\mu = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \end{aligned}$$

Ez a kifejezés a háromdimenziós Laplace-operátor megfelelője; d'Alembert-operátor a neve, és külön jelölése van:

$$\Box^2 = \nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \tag{77.20}$$

Definíciójából következően a d'Alembert-operátor invariáns skalár; négyesvektortérre alkalmazva egy új négyesvektorteret ad. [A szakirodalom tanulmányozásakor óvatosaknak kell lennünk, ugyanis a d'Alembert-operátort néha a (77.20) egyenlet (-1)-szeresével definiálják.]

Megtaláltuk tehát csaknem minden háromdimenziós mennyiség négydimenziós megfelelőjét, amelyeket annak idején a 77.1. táblázatban foglaltunk össze. (Még nem ismertük meg a vektorszorzat, illetve a rotáció operátorának analogonjait, erre majd csak a következő fejezetben kerül sor.) Hasznos ezeket a fontos definíciókat, illetve leszármaztatott mennyiségeket egy helyre felírni, ebből a célból állítottuk össze a 77.2. táblázatot.

77.4. Elektrodinamika négydimenziós jelölésmódban

A 70. fejezet 70.6. szakaszában már, nevének megemlítése nélkül, bevezettük egyszer a d'Alembert-operátort. A potenciálokra akkor felírt differenciálegyenletek az új jelölésmódban így festenek:

$$\Box^2 \varphi = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \Box^2 \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \tag{77.21}$$

	Három dimenzió
Vektor	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
Skalárszorzat	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$
Vektoroperátor	$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$
Gradiens	$\nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$
Divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Laplace-operátor	$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
	Négy dimenzió
Vektor	$a_\mu = (a_t, a_x, a_y, a_z) = (a_t, \mathbf{a})$
Skalárszorzat	$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
Vektoroperátor	$\nabla_\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z) = (\partial/\partial t, -\nabla)$
Gradiens	$\nabla_\mu \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \nabla\varphi\right)$
Divergencia	$\nabla_\mu a_\mu = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{a}$
d'Alembert-operátor	$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \Box^2$

77.2. táblázat. A vektoranalízis fontosabb mennyiségei három és négy dimenzióban

A (77.21) két egyenletének jobb oldalán álló négy mennyisége rendre ϱ, j_x, j_y, j_z, osztva ε_0-val. ε_0 univerzális állandó és minden koordináta-rendszerben ugyanaz, feltéve, hogy minden koordináta-rendszerben ugyanazt a töltésegységet használjuk. Így a $\varrho/\varepsilon_0, j_x/\varepsilon_0, j_y/\varepsilon_0, j_z/\varepsilon_0$ mennyiségek szintén négyesvektorokként transzformálódnak. Írjuk őket a j_μ/ε_0 alakban. A d'Alembert-operátor a koordináta-rendszer megváltozásával nem változik, tehát a φ, A_x, A_y, A_z mennyiségeknek *szintén négyesvektorokként kell* transzformálódniuk – ami azt jelenti, hogy egy *négyesvektor* komponensei. Röviden az

$$A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$$

mennyiség egy négyesvektor. Az a mennyiség, amit skalár- vagy vektorpotenciáinak nevezünk, tulajdonképpen ugyanannak a fizikai mennyiségnek két különböző megnyilvánulása és együvé tartozik. Ha pedig együttes jelölésmódot alkalmazunk, a világ relativisztikus invarianciája szembeszökővé válik. A_μ-t négyespotenciálnak nevezzük.

Négyesvektor-jelölésben a (77.21) egyenlet az egyszerű

$$\Box^2 A_\mu = \frac{j_\mu}{\varepsilon_0} \tag{77.22}$$

alakot veszi fel. Fizikai tartalma pontosan ugyanaz, mint a Maxwell-egyenleteké, nagy élvezetet jelent azonban az, hogy képesek vagyunk mindezt ilyen elegáns formára hozni. A csinos forma önmaga is jelent valamit: közvetlenül rámutat az elektrodinamika invarianciájára a Lorentz-transzformációval szemben.

Emlékezzünk vissza, a (77.21) egyenletet a Maxwell-egyenletekből úgy tudtuk levezetni, hogy egyidejűleg kitűztük a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{77.23}$$

mellékfeltételt, ami másképpen írva: $\nabla_\mu A_\mu = 0$. E mellékfeltétel, amelyet *Lorentz-feltételnek* neveznek, kimondja, hogy az A_μ négyesvektor négyesdivergenciája zérus. Kényelmes ezzel a feltétellel dolgoznunk, mert invariáns jellege biztosítja, hogy a Maxwell-egyenletek a (77.22) formában minden koordináta-rendszerben érvényben maradjanak.

77.5. Mozgó töltés négyespotenciálja

Jóllehet az elmondottak tulajdonképpen már magukban foglalják, írjuk le most külön-külön is azokat a transzformációs összefüggéseket, amelyek valamely mozgó rendszerben mért φ-t és $\mathbf{A}$-t a nyugvó rendszerben talált φ és $\mathbf{A}$ függvényében adják meg. Minthogy $A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ négyesvektor, a keresett egyenleteknek ugyanúgy kell kinézniük, ahogyan (77.1), azzal a különbséggel, hogy t helyébe φ-t, $\mathbf{x}$ helyébe pedig $\mathbf{A}$-t teszünk.

Azaz:

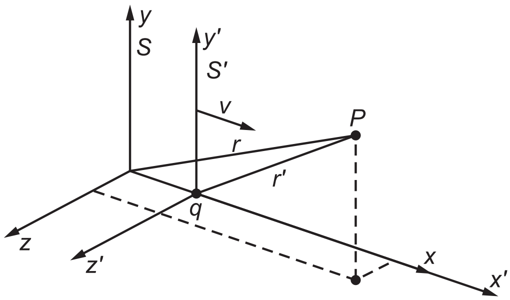
$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{\varphi - vA_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A'_y = A_y, \\ A'_x &= \frac{a_x - v\varphi}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A'_z = A_z. \end{aligned} \tag{77.24}$$

Feltételeztük, hogy a vesszős koordináta-rendszer a vesszőtlenben mérve v sebességgel mozog a pozitív x irány mentén.

A négyespotenciál fogalmának hasznosságát most egy példán keresztül mutatjuk be. Számítsuk ki az x-tengely mentén v sebességgel haladó q töltéstől származó skalár- és vektorpotenciált! A töltéssel együtt mozgó koordináta-rendszerben könnyen kiszámíthatjuk ezeket a mennyiségeket, mivel ebben a rendszerben a töltés nyugalomban van. Legyen a töltés az S' rendszer középpontjában, ahogy az a 77.2. ábrán látható. A skalárpotenciál ebben a mozgó rendszerben

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}, \tag{77.25}$$

ahol r' a q töltés távolsága a tér P pontjától az S' rendszerben . Az $\mathbf{A}'$ vektorpotenciál természetesen zérus.



77.2. ábra. S' rendszer v sebességgel mozog S-hez képest (az x irány mentén). Az S' középpontjában nyugvó töltés az S rendszerben az $x = vt$ helyen tartózkodik. A P pontban levő potenciálok mindkét rendszerben kiszámíthatók

A nyugvó koordináta-rendszerben mért φ és $\mathbf{A}$ potenciál mármost igen egyszerűen adódik. A (77.24) egyenletben szereplő összefüggés megfordításából

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi' + vA'_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A_y = A'_y. \\ A_x &= \frac{A'_x + v\varphi'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A_z = A'_z. \end{aligned} \tag{77.26}$$

Felhasználva a (77.25)-tel meghatározott φ-t, valamint azt, hogy $\mathbf{A}' = 0$,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r'\sqrt{1-v^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Ez utóbbi összefüggés ugyanazt a φ skalárpotenciált adja meg, amelyet S-ben észlelnénk, sajnos azonban S' koordinátáival. A (77.1) alkalmazásával viszont t', x', y' és z'-t kifejezhetjük t, x, y és z-vel. A következőt kapjuk:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{[(x-vt)/\sqrt{1-v^2}]^2 + y^2 + z^2}}. \tag{77.27}$$

Ugyanezt az eljárást követve, $\mathbf{A}$ komponensei esetén megmutatható, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}\varphi. \tag{77.28}$$

Az így kapott kifejezések ugyanazok, mint amelyeket a 73. fejezetben más módszerrel már levezettünk.

77.6. Az elektrodinamika egyenleteinek invarianciája

Láttuk, hogy a φ és $\mathbf{A}$ potenciálok együttesen négyesvektort alkotnak, amelyet A_μ-nek neveztünk, és hogy a hullámegyenletek – A_μ-t a j_μ-vel meghatározó teljes egyenletrendszer – a (77.22) egyenlet kapcsán megismert formában írható fel. Ez az egyenlet, valamint a töltés megmaradása (lásd (77.19) egyenlet] adja az elektromágneses tér alapegyenletét:

$$\Box^2 A_\mu = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\mu, \quad \nabla_\mu j_\mu = 0. \tag{77.29}$$

Könyvünk ilyen parányi helyén elfér az egész Maxwell-egyenletrendszer – elegánsan és egyszerűen. Vajon származott-e valami hasznunk belőle, hogy az egyenleteket ilyen formában írtuk fel, azon kívül, hogy egyszerűek és szép formájúak? Adódott-e valami különbség a régihez képest, amikor mindent kiírtunk komponensenként? Le tudunk-e vezetni valami olyat az új egyenletekből, amelyet az áramok és töltések segítségével a potenciálokra felírt hullámegyenletekből nem tudnánk megkapni? A válasz határozott nem. Nem tettünk semmi mást, mint hogy más nevet adtunk mindennek az új jelölések bevezetésével. Egy négyzetet rajzoltunk differenciálhányadosok jelképezésére, ez azonban ezután sem jelent semmi mást, mint a t szerinti második deriváltat, mínusz az x szerinti második derivált, mínusz az y szerinti második derivált, mínusz a z szerinti második derivált. A μ pedig arra utal, hogy négy egyenlettel van dolgunk, $\mu = t, x, y$ vagy z mellett külön-külön eggyel. Akkor hát mi a jelentősége annak, hogy az egyenletek ilyen egyszerű alakban írhatók fel? Olyan szempontból, hogy közvetlenül levezessünk belőlük valamit, semmi. Esetleg azonban az egyenletek egyszerűsége arról tanúskodik, hogy a természet maga is bizonyos módon egyszerű.

Bemutatok Önöknek valami érdekeset, amit épp az imént fedeztünk fel. A természet összes törvénye egyetlen egyenletben foglalható össze:

$$\cup = 0. \tag{77.30}$$

Milyen egyszerű ez az egyenlet! Szükséges természetesen tudnunk, mit jelent a $\cup$ szimbólum.

$\cup$ valamilyen fizikai mennyiség, amelyet a kiragadott fizikai helyzet „természetellenességének” nevezünk. Kiszámítására képlet áll rendelkezésünkre. Íme, így kell a fizikai lényeget meghatároznunk. Veszünk minden fizikai törvényt, majd egy sajátságos alakra hozzuk őket. Legyen egy kiragadott törvény például a mechanika törvénye: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, amelyet így írunk fel: $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$. Az $(\mathbf{F} - m\mathbf{a})$ mennyiséget – amelynek természetesen zérusnak kell lennie – elnevezzük a mechanika „illesztetlenségének”. Következő lépésként ezt az illesztetlenséget *négyzetre emeljük*, és $\cup_1$-gyel jelöljük, és ezt elnevezzük a mechanikai jelenségek „természetellenességének”. Más szóval, képezzük a

$$\cup_1 = (\mathbf{F} - m\mathbf{a})^2 \tag{77.31}$$

mennyiséget. Ezután veszünk egy másik fizikai törvényt, mondjuk, azt, hogy $\nabla \cdot \mathbf{E} = \varrho/\varepsilon_0$, és definiáljuk az

$$\cup_2 = \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\right)^2$$

mennyiséget, amelyet a „villamosságtan Gauss-féle természetellenességének" keresztelünk el. Az eljárást tovább folytatva felírjuk $\cup_3$-at, $\cup_4$-et, s így tovább, minden ismert fizikai törvényre egy $\cup$-t.

Végül a világ *teljes* lényegén az egyes részjelenségek $\cup_i$ természetellenességeinek összegét értjük, vagyis $\cup = \sum \cup_i$. A természet „nagy törvénye" ezután így fest majd:

$$\cup = 0. \tag{77.32}$$

Ez a „törvény" azt jelenti, hogy az egyes „illesztetlenségek" négyzeteinek összege zérus; másrészt viszont egy négyzetekből álló összeg csak úgy lehet zérus, ha maguk az egyes tagok is külön-külön zérussal egyenlők.

A (77.32) által leírt „csodálatosan egyszerű" törvény tehát tulajdonképpen az eredetileg felírt egyenletekkel egyenértékű. Ennélfogva teljesen nyilvánvaló, hogy valamely egyszerű jelölés, amely szimbólumainak egyszerűségével csupán elfedi bizonyos dolgok összetettségét, valójában nem tanúskodik igazi egyszerűségről. Az egész nem más, mint szemfényvesztés. A (77.32) egyenletben megnyilvánuló elegancia – amely onnan adódik, hogy sikerült elrejteni benne egynéhány egyenletet – nem más, mint önámítás. Ha legöngyölítenénk az egészet, ugyanoda kerülnénk vissza, ahonnan elindultunk.

Az elektromágnesesség törvényeinek (77.29) képletben felírt alakja az egyszerűségen kívül azonban még többet *is* jelent. Többet mond ugyanabban az értelemben, mint ahogyan a vektoranalízis elmélete is többet tartalmaz. Az a tény, hogy az elektromágneses egyenletek felírhatók egy igen különös, a Lorentz-transzformációk négydimenziós geometriájához *készült* jelölésmódban – más szavakkal, egyenleteink vektoregyenletekként írhatók fel a négyestérben –, azt jelenti, hogy invariánsak a Lorentz-transzformációkkal szemben. Vagyis pontosan azért lehet egyenleteinket ilyen elegáns formába öltöztetni, *mert* a Maxwell-egyenletek ezekkel a transzformációkkal szemben invariánsak.

Nem véletlen tehát, hogy az elektrodinamika egyenleteit a (77.29) egyenlet elegáns alakjában tudjuk felírni. A relativitás elmélete azért fejlődött ki, mert *kísérletileg azt találták*, hogy a Maxwell-egyenletek által megjósolt jelenségek ugyanazok minden tehetetlenségi rendszerben. Épp a Maxwell-egyenletek transzformációs tulajdonságainak tanulmányozása vezette el Lorentz-et a róla elnevezett transzformáció felfedezéséhez, s kidolgozott egy olyan transzformációt, amely a Maxwell-egyenleteket invariánsan hagyja.

Van azonban más okunk is arra, hogy egyenleteinket így írjuk fel. Einstein előzetes megsejtése nyomán ugyanis felfedezték, hogy minden fizikai törvény invariáns a Lorentz-transzformációval szemben. Ez a relativitás elve. Olyan jelölést kell tehát kitalálnunk, amely azon nyomban elárulja, hogy a felírt törvény invariáns-e vagy sem, s ez biztosít bennünket arról, hogy új elméletek felállítása során csak olyan egyenleteket próbálgatunk ki, amelyek nem mondanak ellent a relativitás elvének.

Nem csoda tehát, hogy a Maxwell-egyenletek egyszerűkké válnak ebben a sajátságos jelölésmódban, hiszen a jelölésmód kigondolásánál épp ezeket vették figyelembe. Az azonban érdekes tény, hogy a fizika *bármely törvényének* – a mezonhullámok tovaterjedésétől kezdve a neutrínók viselkedéséig a β-bomlásban – rendelkeznie kell ugyanezzel az invarianciatulajdonsággal ugyanazon transzformációval szemben. Így ha egyenletes sebességgel haladó űrhajóban lennénk, a természet minden törvénye együttesen olyan módon transzformálódna, hogy egyetlen új jelenség sem lépne fel. A környező világot leíró egyenletek tehát azért lesznek olyan egyszerű formájúak, ha négydimenziós vektorokkal írjuk le őket, mert a relativitás elve természeti tény.